

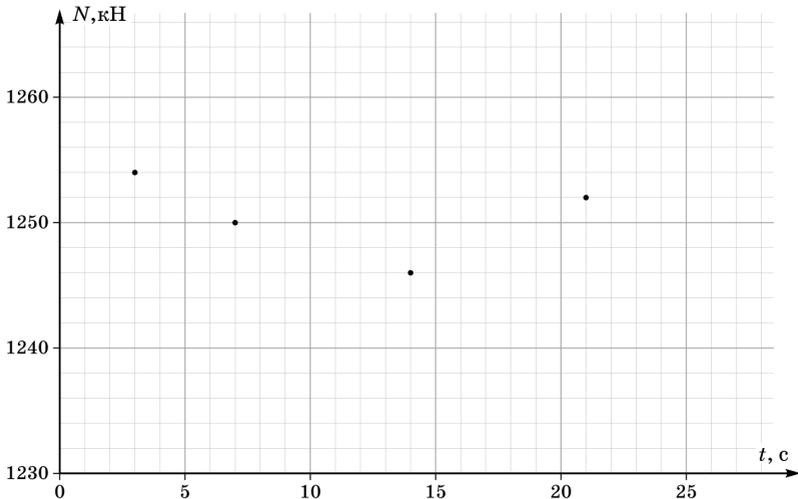
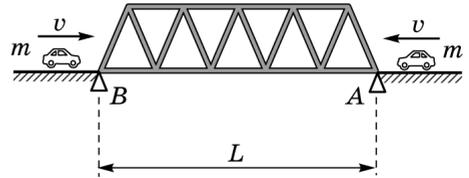
## 8 класс Теоретический тур

### Задача №1. Черти

В момент времени  $t = 0$  катер обогнал свободно плывущий по течению реки плот. В момент времени  $\tau$  катер поравнялся с теплоходом, идущим против течения реки, а в момент времени  $2\tau$  катер быстро развернулся и поплыл с той же скоростью (относительно реки) в обратном направлении. При этом через некоторое время после разворота катер встретил плот, а еще через такое же время второй раз поравнялся с теплоходом. В какой момент времени теплоход встретился с плотом? Чему равно отношение собственных скоростей катера и теплохода?

### Задача №2. Два автомобиля

Автомобильный мост установлен на опорах  $A$  и  $B$ . Под опорой  $A$  расположен датчик, снимающий зависимость силы реакции опоры  $N$  от времени  $t$ . В начальный момент на мост со стороны опоры  $A$  со скоростью  $18 \text{ км/ч}$  въезжает небольшой легковой автомобиль. Спустя время  $\Delta t$  со стороны опоры  $B$  на мост с той же скоростью въезжает другой такой же автомобиль. Из-за нестабильной связи с датчиком на графике зависимости  $N(t)$  удалось получить лишь несколько точек (см. рисунок).



1. Восстановите график до 30-й секунды.

Определите:

2. длину  $L$  моста;

3. время  $\Delta t$ ;

4. массу  $M$  моста;

5. массу  $m$  автомобиля.

*Примечание.* Мост можно считать однородным, а размеры автомобиля пренебрежимо малыми. Другие участники движения на мосту за время наблюдения не появлялись. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ Н/кг}$ .

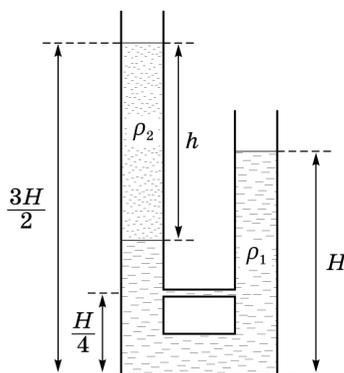
### Задача №3. Сообщающиеся сосуды

Два сообщающихся сосуда с одинаковой площадью сечения  $S$  соединены дополнительной тонкой трубочкой на высоте  $\frac{H}{4}$  от их дна. В сосуды налили жидкость с плотностью  $\rho_1$ . После этого в левый сосуд добавили жидкость с плотностью  $\rho_2 < \rho_1$ , высота столба которой оказалась равной  $h$  (см. рисунок). Высота столба жидкости в правом сосуде равна  $H$ , а суммарная высота столба жидкости в левом сосуде равна  $\frac{3H}{2}$ . Жидкости не смешиваются.

1. Чему равна плотность  $\rho_2$ , если плотность  $\rho_1$  известна?

В левом сосуде на жидкость положили массивный поршень. Поршень скользит без трения, а жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает.

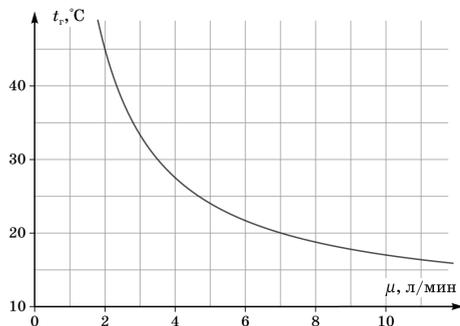
2. Определите, при какой массе  $m$  поршня верхние границы жидкостей в левом и правом сосуде в положении равновесия будут расположены на одном уровне.



### Задача №4. Нагреватель

Проточный водонагреватель — это устройство, которое обеспечивает подачу горячей воды из крана путём нагрева холодной воды, которая проходит через него. На графике представлена зависимость температуры  $t_r$  горячей воды на выходе из крана от объёмного расхода  $\mu$  воды через проточный нагреватель.

1. Найдите мощность  $P$  водонагревателя.



2. Найдите температуру  $t_{\text{н}}$  холодной воды, поступающей в нагреватель.

3. При каком объёмном расходе  $\mu_1$  температура горячей воды будет равна  $t_{\text{к}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

Удельная теплоёмкость воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , плотность воды  $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Считайте, что мощность нагревателя постоянна, тепловыми потерями можете пренебречь.

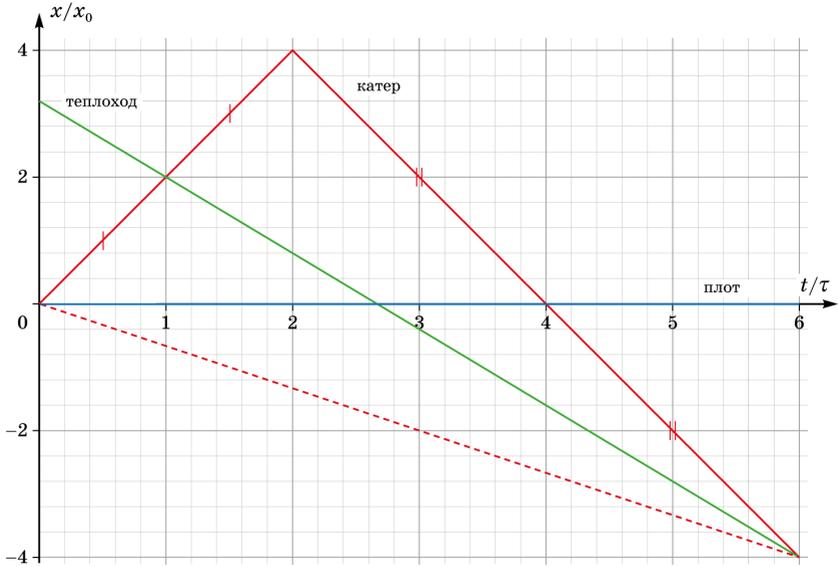
## 8 класс

### Задача №8-Т1. Черти

Обозначим скорость реки -  $u$ , а скорости катера и теплохода в СО реки -  $v_k$  и  $v_T$  соответственно.

#### Графические методы решения

#### 1 метод (графический в СО реки):



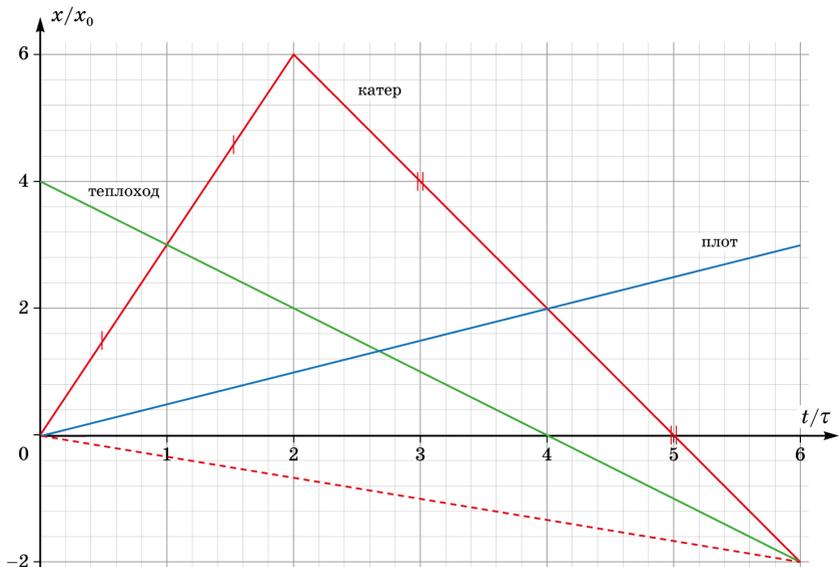
Построим графики зависимостей координат тел в подвижной системе отсчета, связанной с рекой, от времени. Катер и до, и после разворота плыл со скоростью  $v_k$ . Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени  $4\tau$ , а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени  $6\tau$ . Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, катер прошел  $10x_0$  ( $x_0$  - условная единица), а теплоход -  $6x_0$ . Следовательно,

$$\frac{v_k}{v_T} = \frac{5}{3}.$$

**2 метод (графический в СО Земли):**



Построим графики зависимостей координат тел в системе отсчета Земли. Относительно плота катер и до, и после разворота плыл со скоростью  $v_k$ . Так что вторая встреча катера и плота произошла в момент времени  $4\tau$ , а вторая встреча катера с теплоходом – в момент времени  $6\tau$ . Точка на графике, соответствующая встрече теплохода и плота, является точкой пересечения медиан в красном треугольнике (см. рисунок). Так как медианы треугольника точкой своей пересечения делятся в отношении 2:1, то

$$\tau_0 = \frac{2}{3} \cdot 4\tau = \frac{8}{3}\tau.$$

За время от первой до второй встречи теплохода и катера, перемещение катера составило  $(v_k - u)4\tau - (v_k + u)\tau$ , а перемещение теплохода –  $(v_t - u)5\tau$ . Приравнявая соответствующие перемещения, получим

$$\frac{v_k}{v_t} = \frac{5}{3}$$

**Аналитические методы решения**

**3 метод (аналитический в СО Земли):**

Запишем уравнения движения тел в СО Земли:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = ut \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)t, \text{ при } t \in [0, 2\tau] \\ x_{\text{к}} = (v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t - 2\tau), \text{ при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - (v_{\text{т}} - u)t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени  $\tau$ :

$$x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau = (v_{\text{к}} + u)\tau,$$

откуда  $x_0 = (v_{\text{к}} + v_{\text{т}})\tau$ .

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени  $t_1$ ):

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(t_1 - 2\tau) = ut_1,$$

откуда  $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени  $6\tau$ . Условие этой встречи:

$$(v_{\text{к}} + u)2\tau - (v_{\text{к}} - u)(6\tau - 2\tau) = x_0 - (v_{\text{т}} - u)6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_{\text{к}}}{v_{\text{т}}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$u\tau_0 = x_0 - (v_{\text{т}} - u)\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau \frac{v_{\text{к}} + v_{\text{т}}}{v_{\text{т}}} = \frac{8}{3}\tau.$$

**4 метод (аналитический в СО реки):**

Запишем уравнения движения тел в СО реки:

$$\begin{cases} x_{\text{п}} = 0 \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}t, \text{ при } t \in [0, 2\tau] \\ x_{\text{к}} = v_{\text{к}}2\tau - v_{\text{к}}(t - 2\tau), \text{ при } t > 2\tau \\ x_{\text{т}} = x_0 - v_{\text{т}}t \end{cases}$$

Условие встречи теплохода и катера в момент времени  $\tau$ :

$$x_0 - v_{\text{Т}}\tau = v_{\text{К}}\tau,$$

откуда  $x_0 = (v_{\text{К}} + v_{\text{Т}})\tau$ .

Условие второй встречи катера с плотом (в момент времени  $t_1$ ):

$$v_{\text{К}}2\tau - v_{\text{К}}(t_1 - 2\tau) = 0,$$

откуда  $t_1 = 4\tau$

Следовательно, вторая встреча катера с теплоходом произошла в момент времени  $6\tau$ . Условие этой встречи:

$$v_{\text{К}}2\tau - v_{\text{К}}(6\tau - 2\tau) = x_0 - v_{\text{Т}}6\tau,$$

откуда

$$\frac{v_{\text{К}}}{v_{\text{Т}}} = \frac{5}{3}$$

Условие встречи теплохода и плота:

$$0 = x_0 - v_{\text{Т}}\tau_0,$$

откуда

$$\tau_0 = \tau \frac{v_{\text{К}} + v_{\text{Т}}}{v_{\text{Т}}} = \frac{8}{3}\tau$$

### Задача №8-Т2. Два автомобиля

Правило моментов относительно точки  $B$  после въезда первого автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt)$$

Следовательно

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{vt}{L} \quad (1)$$

Правило моментов относительно точки  $B$  после въезда второго автомобиля на мост:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mg(L - vt) + mgv(t - \Delta t)$$

Откуда

$$N = \frac{1}{2}Mg + mg - mg\frac{v\Delta t}{L} \quad (2)$$

Правило моментов относительно точки  $B$  после съезда первого автомобиля с моста:

$$NL = Mg\frac{L}{2} + mgv(t - \Delta t)$$

То есть

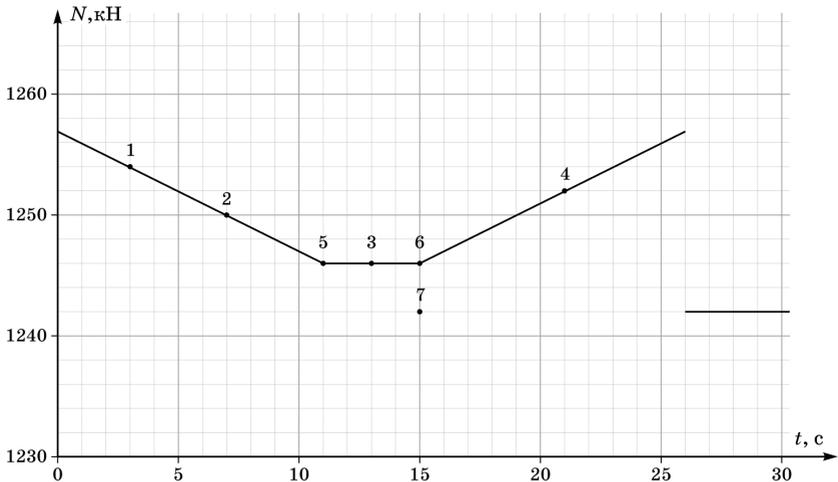
$$N = \frac{1}{2}Mg - mg\frac{v\Delta t}{L} + mg\frac{vt}{L} \quad (3)$$

После того, как второй автомобиль съедет с моста

$$N = \frac{1}{2}Mg \quad (4)$$

С учетом полученных выражений график зависимости  $N(t)$  состоит из 4 линейных участков: первый — убывающий, с угловым коэффициентом  $-\frac{mgv}{L}$ ; второй — горизонтальный ( $N$  в (2) не зависит от времени); третий — возрастающий, с угловым коэффициентом  $\frac{mgv}{L}$ ; и четвертый — горизонтальный ( $N = \frac{1}{2}Mg$ ). Заметим, что угловые коэффициенты на первом и третьем отрезке одинаковы по величине, но противоположны по знаку. То есть эти отрезки симметричны.

Анализируя точки на исходном графике, не сложно прийти к выводу, что точки 1 и 2 относятся к первому отрезку, точка 3 — ко второму, а 4 — к третьему. При стабильной связи график выглядел бы так:



Каждый из автомобилей проводит на мосту 15 секунд (точка 6 — момент съезда первого автомобиля). А значит длина моста  $L = vt_6 = 75$  м.

Время между въездами машин на мост —  $\Delta t = 11$  с (начало горизонтального отрезка).

Точка 7, в которую первая прямая пришла бы к 15-й секунде, дает возможность определить массу моста  $M = 248,4$  т.

Разность начального значения силы реакции опоры с  $N_7$  дает возможность определить массу автомобиля  $m = 1,5$  т.

### Задача №8-Т3. Сообщающиеся сосуды

Плотность  $\rho_2$  находим из условия равенства давлений жидкости у дна в левом и правом сосудах:

$$\rho_2 g h + \rho_1 g \left( \frac{3}{2} H - h \right) = \rho_1 g H$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left( 1 - \frac{H}{2h} \right)$$

Уровни жидкости в двух половинках сосуда сравниются и станут равны  $\frac{5H}{4}$ , т.е. в левом сосуде уровень опустится на  $\frac{H}{4}$ , а в правом поднимется на  $\frac{H}{4}$ . Следует, также, иметь в виду, что согласно условию  $h$  всегда больше  $\frac{H}{2}$  ( $h > \frac{H}{2}$ ).

В зависимости от величины  $h$  в задаче возможны 2 случая.

1.  $h < H$ , нижняя граница второй жидкости не опустится до уровня трубочки. В этом случае масса поршня находится из условия равенства давлений у дна сосуда:

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g h + \rho_1 g \left( \frac{5H}{4} - h \right) = \rho_1 g \frac{5H}{4}$$

Откуда

$$m = (\rho_1 - \rho_2) h S = \rho_1 \frac{H}{2} S$$

2. В случае  $\frac{5H}{4} > h > H$  нижний уровень жидкости с плотностью  $\rho_2$  в процессе опускания поршня дойдет до трубочки, жидкость начнет перетекать в правый сосуд и будет в нем всплывать вверх, так как  $\rho_2 < \rho_1$ . Теперь, если считать от дна, жидкость с плотностью  $\rho_1$  в левом сосуде доходит до уровня  $\frac{H}{4}$ , а столб жидкости с плотностью  $\rho_2$  имеет высоту  $H$ . Из условия сохранения объемов следует, что столб жидкости с  $\rho_1$  в правом сосуде теперь имеет высоту  $\left( \frac{9H}{4} - h \right)$ , а высота столба жидкости с плотностью  $\rho_2$  равна  $(h - H)$ .

Отсюда получаем

$$\frac{mg}{S} + \rho_2 g H + \rho_1 g \frac{H}{4} = \rho_1 g \left( \frac{9H}{4} - h \right) + \rho_2 g (h - H)$$

или

$$m = \rho_1 (2H - h) S + \rho_2 (h - 2H) S = \rho_1 \frac{H(2H - h)}{2h} S$$

### Задача №8-Т4. Нагреватель

Пусть  $P$  – мощность водонагревателя,  $\tau$  – время, в течение которого вода находится в нагревателе, тогда количество теплоты, переданное нагревателем за это время воде, равно

$$Q_1 = P\tau$$

Суммарное количество теплоты, полученное водой за время нахождения в нагревателе:

$$Q_2 = cm(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

Запишем уравнение теплового баланса:

$$P\tau = cm(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

Так как масса воды равна  $m = \rho V = \rho\mu\tau$ , где  $V$  – объём нагревателя, то

$$P\tau = c\rho V(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

$$P = c\rho\mu(t_{\text{г}} - t_{\text{н}})$$

На графике можем выбрать точки с координатами, которые «хорошо» определяются  $t_{\text{г}1} = 45 \text{ }^\circ\text{C}, \mu_1 = 2 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{2}{60} \frac{\text{л}}{\text{с}}$  и  $t_{\text{г}2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \mu_2 = 7 \frac{\text{л}}{\text{мин}} = \frac{7}{60} \frac{\text{л}}{\text{с}}$ . Тогда

$$\begin{cases} P = c\rho\mu_1(t_{\text{г}1} - t_{\text{н}}) \\ P = c\rho\mu_2(t_{\text{г}2} - t_{\text{н}}) \end{cases}$$

Из системы получим

$$t_{\text{н}} = \frac{\mu_2 t_{\text{г}2} - \mu_1 t_{\text{г}1}}{\mu_2 - \mu_1} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$P = 4200 \cdot 1000 \cdot \frac{0,002}{60} \cdot (45 - 10) = 4,9 \text{ кВт}$$

Объемный расход, при котором температура нагретой воды будет равна  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , равен

$$\mu_1 = \frac{4900}{4200 \cdot 1000 \cdot 90} = 1,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}} = 0,78 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$